ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Κάποιος οδηγός που χρειάζεται κέρματα, για να ρίξει στο μηχάνημα στάθμευσης (parking), ζητάει από τον περιπτερά να του ανταλλάξει ένα χαρτονόμισμα των 10 ευρώ με κέρματα των 1 ευρώ και των 50 λεπτών. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η ανταλλαγή, αν ο οδηγός θέλει οπωσδήποτε και κέρματα του 1 ευρώ και των 50 λεπτών ;

ΛΥΣΗ

Αν η ανταλλαγή μπορεί να γίνει με x κέρματα του 1 ευρώ και y κέρματα των 50 λεπτών, τότε

$$x + 0,50y = 10 \text{ ή}$$

$$2x + y = 20. \qquad (1)$$

Αναζητούμε προφανώς τις ακέραιες και θετικές λύσεις της (1). Επειδή $(2,1)=1$ και $1|20$, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις. Για να βρούμε το σύνολο των λύσεών της, πρέπει να βρούμε μια μερική λύση (x_0, y_0) της εξίσωσης ή, όπως λέμε, μια *ειδική λύση* της εξίσωσης.

Εκφράζουμε γραμμικά το Μ.Κ.Δ. των 2 και 1 και έχουμε

$$2(1)+1(-1)=1. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (2) με 20 και έχουμε $2(20)+1(-20)=20$, που σημαίνει ότι $(x_0, y_0)=(20,-20)$. Επομένως, οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (1) δίνονται από τους τύπους:

$$x=20+1\cdot t, \quad y=-20-2\cdot t, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

Από τις λύσεις αυτές πρέπει να βρούμε εκείνες για τις οποίες ισχύει $x>0$ και $y>0$, δηλαδή πρέπει να βρούμε πού συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$20+1\cdot t>0 \text{ και } -20-2\cdot t>0, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

Από την επίλυση του συστήματος των ανισώσεων προκύπτει ότι $-20<t<-10$, $t\in\mathbf{Z}$. Επομένως, $t=-19,-18,-17,-16,-15,-14,-13,-12,-11$ και οι αντίστοιχες τιμές των x και y φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2